第７講　場合の数・確率

1　A，B，C，D がそれぞれ表に a，b，c，d と書かれたカードを持っている（カードの裏には何も書かれていない）．４人全員が自分のカードを裏返して場に出し，どれがどのカードかわからないようシャッフルした後１人１枚ずつ引くとする．次の問いに答えよ．

(1)　A が a のカードを引く確率を求めよ．

(2)　A が b のカードを引き，残りの B，C，D のうちの誰かがもともと自分自身の持っていたカードを引く確率を求めよ．

(3)　自分自身の持っていたカードを誰も引かない確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 袋Aの中に赤球2個，袋Bの中に白球2個が入っている．「Aから無作為に1個の球を取り出してBに入れ，その後Bの中から無作為に1個の球を取り出してAに戻す」という操作を繰り返す．いま n 回操作した後に，Aの中に赤球が0，1，2個入っているという事象を，それぞれ $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ で表す．このとき，事象 $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ のそれぞれが起こる確率を求めよ．

［2］ a 個の白球と b 個の赤球が入っているつぼが n 個ある．第1のつぼから1個の球を取り出して第2のつぼに入れ，次に第2のつぼから1個の球を取り出して第3のつぼに入れる．この操作を続けて最後に第 n のつぼから取り出された球が赤球である確率を求めよ．ただし，つぼから各球は等しい確率で取り出されるものとする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1つのサイコロを何回も振る試行において，初めて6の目が出たら，6の目が出る限り振り続け，6の目が出なくなったとき振ることをやめるものとする．ただし，振る回数は全体で n を越えないものとする．

(1)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出る確率を求めよ．

(2)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出たら 6^{r-1} 円もらう約束をした人が受け取る金額の期待値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　場合の数・確率

1　A，B，C，D がそれぞれ表に a，b，c，d と書かれたカードを持っている（カードの裏には何も書かれていない）．4 人全員が自分のカードを裏返して場に出し，どれがどのカードかわからないようシャッフルした後 1 人 1 枚ずつ引くとする．次の問いに答えよ．

(1)　A が a のカードを引く確率を求めよ．

(2)　A が b のカードを引き，残りの B，C，D のうちの誰かがもともと自分自身の持っていたカードを引く確率を求めよ．

(3)　自分自身の持っていたカードを誰も引かない確率を求めよ．

4 人のカードの引き方の総数は　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1$（通り）

(1)　A が a のカードを引くとき，残り 3 人のカードの引き方は $3!$ 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3!}{4!}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　A が b のカードを引くとき，残り a，c，d のカードについて題意を満たす引き方は，B，C，D が引くカードを (B，C，D) と表すと (B，C，D)$=(a,\ c,\ d)$，$(d,\ c,\ a)$，$(c,\ a,\ d)$ の 3 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{4!}=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$

(3)　A が b を引くとき，題意を満たすのは (B，C，D)$=(a,\ d,\ c)$，$(c,\ d,\ a)$，$(d,\ a,\ c)$ の 3 通り．A が c，d を引くときも同様 3 通り．よって，求める確率は　$\dfrac{3+3+3}{4!}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

2　[1]　袋 A の中に赤球 2 個，袋 B の中に白球 2 個が入っている．「A から無作為に 1 個の球を取り出して B に入れ，その後 B の中から無作為に 1 個の球を取り出して A に戻す」という操作を繰り返す．いま n 回操作した後に，A の中に赤球が 0，1，2 個入っているという事象を，それぞれ $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ で表す．このとき，事象 $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ のそれぞれが起こる確率を求めよ．

$A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ が起こる確率をそれぞれ $p_n(0)$，$p_n(1)$，$p_n(2)$ とする．

$A_n(0)$ のとき A の袋は 2 個とも白，B の袋は 2 個とも赤である．

よって，A から B に移したあと，B から白を取り出せば $A_{n+1}(0)$ となる．

$A_n(1)$ のとき A，B ともに赤，白 1 個ずつ．

よって，A から赤を取り出し，B から白を取り出せば $A_{n+1}(0)$ となる．

$A_n(2)$ のときは次の試行で $A_{n+1}(0)$ になることはない．

ゆえに　$p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{3}p_n(0)+\dfrac{1}{6}p_n(1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，赤と白を逆に考えることにより　$p_{n+1}(2)=\frac{1}{3}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(1)$　となる．

よって　$p_{n+1}(1)=1-\{p_{n+1}(0)+p_{n+1}(2)\}=1-\frac{1}{3}\{p_n(0)+p_n(1)+p_n(2)\}=\frac{2}{3}$

また，$p_1(0)=0$，$p_1(1)=\frac{2}{3}$，$p_1(2)=\frac{1}{3}$ である．

したがって　$p_{n+1}(0)=\frac{1}{3}p_n(0)+\frac{1}{9}$

つまり　$p_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{p_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$，$p_1(0)-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$

ゆえに　$p_n(0)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$，$p_n(1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$，

$p_n(2)=1-\{p_n(0)+p_n(1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

2　[2]　a 個の白球と b 個の赤球が入っているつぼが n 個ある．第 1 のつぼから 1 個の球を取り出して第 2 のつぼに入れ，次に第 2 のつぼから 1 個の球を取り出して第 3 のつぼに入れる．この操作を続けて最後に第 n のつぼから取り出された球が赤球である確率を求めよ．ただし，つぼから各球は等しい確率で取り出されるものとする．

第 1 のつぼから赤球を取り出す確率は　$\frac{b}{a+b}$

第 2 のつぼから赤球を取り出すとき，第 1 のつぼから赤球を取り出した場合と白球を取り出した場合に分けられる．

よって，その確率は　$\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}=\frac{b(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}=\frac{b}{a+b}$

したがって第 k のつぼから赤球を取り出す確率は $\frac{b}{a+b}$ と予想される．これを p_k とする．

第 $k+1$ のつぼから赤球を取り出すとき，第 k のつぼから赤球を取り出した場合と白球を取り出した場合に分けられる．

よって　$p_{k+1}=p_k\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+(1-p_k)\cdot\frac{b}{a+b+1}$

$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}=\frac{b}{a+b}$

したがって，すべての自然数 n で　$p_n=\frac{b}{a+b}$　が成り立つ．

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{\frac{b}{a+b}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1つのサイコロを何回も振る試行において，初めて6の目が出たら，6の目が出る限り振り続け，6の目が出なくなったとき振ることをやめるものとする．ただし，振る回数は全体で n を越えないものとする．

(1)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出る確率を求めよ．

(2)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出たら 6^{r-1} 円もらう約束をした人が受け取る金額の期待値を求めよ．

(1)　6の目が続いてちょうど r 回出るとき

(i)　最後が6のとき

最初の $n-r$ 回は6以外の目が出て，その後の r 回はすべて6が出る場合である．

その確率は　$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-r} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{r}$

(ii)　最後が6以外のとき

最初の $k-r-1$ 回 $(r+1 \leqq k \leqq n)$ に6以外の目が出て，その後 r 回連続で6が出て，最後に6以外の目が出る場合である．

その確率は　$\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-r} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{r} = \frac{\frac{5}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\}}{1-\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{r} = \left\{5-5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{r}$

(i)，(ii)より，求める確率は　$\boldsymbol{\left\{5-4\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-r}\right\} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{r}}$

(2)　求める期待値は

$$\sum_{r=1}^{n} 6^{r-1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{r}\left\{5-4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\left\{5-4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{5n-4\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{i}\right\}$$

$$= \frac{5}{6}n - \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}{1-\frac{5}{6}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{5}{6}n-4+4\left(\frac{5}{6}\right)^{n}} \text{（円）}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　各面に１から８までの数字が１つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする．$X(n)$ が３で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を３で割ったとき１余る確率を b_n，$X(n)$ を３で割ったとき２余る確率を c_n とする．次の問いに答えよ．ただし，１から８までの数字の出る確率はどれも同じとする．

(1)　a_1，b_1，c_1 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に１個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が２回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は２以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を P_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1)　P_{2l}，P_{2l+1} $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$ および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2)　試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　各面に１から８までの数字が１つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする．$X(n)$ が３で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を３で割ったとき１余る確率を b_n，$X(n)$ を３で割ったとき２余る確率を c_n とする．次の問いに答えよ．ただし，１から８までの数字の出る確率はどれも同じとする．

(1)　a_1，b_1，c_1 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ．

(1)　$X(1)$ が３で割り切れるのは，出目が３，６のとき．よって　$a_1=\frac{2}{8}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

$X(1)$ を３で割ると１余るのは，出目が１，４，７のとき．よって　$b_1=\mathbf{\frac{3}{8}}$

$a_n+b_n+c_n=1$ であることより　$c_1=1-(a_1+b_1)=\mathbf{\frac{3}{8}}$

(2)　出目が３，６であることを事象 $R_0\left(確率\ \frac{1}{4}\right)$，

出目が１，４，７であることを事象 $R_1\left(確率\ \frac{3}{8}\right)$，

出目が２，５，８であることを事象 $R_2\left(確率\ \frac{3}{8}\right)$ と表すとする．

$X(n+1)$ が３で割り切れるのは次の通り

(i)　$X(n)$ が３で割り切れ，$n+1$ 回目に R_0 が起こる

(ii)　$X(n)$ を３で割ると１余り，$n+1$ 回目に R_2 が起こる

(iii)　$X(n)$ を３で割ると２余り，$n+1$ 回目に R_1 が起こる

よって　$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{3}{8}c_n=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}(b_n+c_n)=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}(1-a_n)$

ゆえに　$a_{n+1}=\boldsymbol{-\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}}$

同様に　$b_{n+1}=\boldsymbol{\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}c_n}$，$c_{n+1}=\boldsymbol{\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{1}{4}c_n}$

(3)　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$，$a_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$　　よって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}}$

b_n と c_n の条件の対称性より　$b_n=c_n$

よって　$\boldsymbol{b_n=c_n=}\frac{1}{2}(1-a_n)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}-\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}}$

確率漸化式である．前の状態において，次に何が起これば目的の状態になるかを漸化式で表し，それを解くことで確率を求める手法．今一度確認を．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に１個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が２回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は２以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を P_k ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2N$) とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1) P_{2l}，P_{2l+1} ($l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1$) および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2) 試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

１回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{a}{a+b}=p$　　白球が出る確率は $\dfrac{b}{a+b}=q$

(1) $2l$ 回目で終了するのは $(2l-2)$ 回目まで赤と白が交互に出て，$2l-1$，$2l$ 回目だけ同色が連続するときである．

よって　$P_{2l}=(pq)^{l-1}\cdot p^2+(qp)^{l-1}\cdot q^2=(pq)^{l-1}(p^2+q^2)=r^{l-1}(1-2r)$

$2l+1$ 回目で終了するのは $2l$ 回目まで赤と白が交互に出て，$(2l+1)$ 回目が $2l$ 回目と同色であるときである．

よって　$P_{2l+1}=(pq)^l\cdot q+(qp)^l\cdot p=(pq)^l(p+q)=r^l$

$2N$ 回目で終了するのは

・すべて赤と白が交互にでる　　・$2N-2$ 回目まで交互，$2N-1$，$2N$ 回目だけ同色が連続

のいずれかである．

よって　$P_{2N}=(pq)^N+(qp)^N+r^{N-1}(1-2r)=r^{N-1}$

(2) $E=2\cdot P_2+3\cdot P_3+\cdots\cdots+2N\cdot P_{2N}$

$$=\sum_{k=2}^{2N}k\cdot P_k=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot P_{2l}+(2l+1)\cdot P_{2l+1}\}+2N\cdot P_{2N}$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l(r^{l-1}-2r^l)+(2l+1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

Σを用いた期待値の計算

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot r^{l-1}-(2l-1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=\{2+4r+\cdots\cdots+(2N-2)r^{N-2}\}$$
$$\quad-\{r+3r^2+\cdots\cdots+(2N-5)r^{N-2}+(2N-3)r^{N-1}\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=2+3(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-2}+r^{N-1})$$

ゆえに　$\boldsymbol{A=2,\ B=3}$

講義問題同様，終了条件がついた反復試行である．
色によるものと回数によるものの条件がついている
ため，確実に分けて考えよう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。